Πανελλαδικές εξετάσεις 2017

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα «Μαθηματικά Ο.Π.»

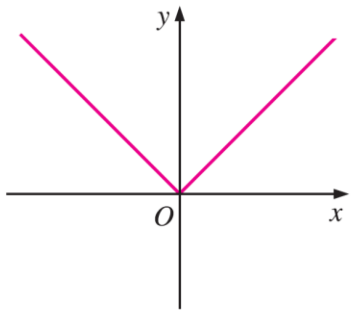
Θέμα Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 136

A2.

α) Λ

β) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:



$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x-0}=1$$ ενώ

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 73

A4. **α) Λάθος**
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Θέμα Β

B1.

$A_f=(0,+\infty)$

$A_g=(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$

$$A_{fog}=\left\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\neq 1 \,/\, \frac{x}{1-x}>0\right\}=\left\{x\neq 1 \,/\, x(1-x)>0\right\}=(0,1)\neq\varnothing$$

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση fog και ο τύπος της είναι $(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\ln g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$

B2.

Η συνάρτηση $\mathrm{h}(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x'(1-x)-x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-\mathrm{x})}>0$$

$\forall x\in(0,1)$

άρα η $h(\mathrm{x})$ ↗, άρα η $h(\mathrm{x})$ είναι 1-1 και επομένως υπάρχει η $h^{-1}(\mathrm{x})$.

$$\mathrm{h(x)}=\mathrm{y}=\ln\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow e^y-xe^y=x\Leftrightarrow e^y=x(1+e^y)\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}\quad(1)$$

(ο περιορισμός $x\in(0,1)$ ικανοποιείται από τη λύση (1)). Άρα:

$$h^{-1}(\mathrm{x})=\frac{e^x}{1+e^x},\mathrm{x}\in\mathrm{R}$$

B3.

Η $\varphi(\mathrm{x})=h^{-1}(\mathrm{x})=\frac{e^x}{1+e^x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων όπως και παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο R.

$\varphi'(\mathrm{x})=\frac{(e^x)'(1+e^x)-e^x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$ άρα φ ↗ στο R και επομένως δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(\mathrm{x})=\frac{(e^x)'(1+e^x)^2-(e^x)((1+e^x)^2)'}{((1+e^x)^2)^2}=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

$\varphi''(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(\mathrm{x})>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$

άρα η φ κυρτή όταν $x\in(-\infty,0]$, κοίλη όταν $x\in[0,+\infty)$.

με σημείο καμπής είναι το Α(0, $\frac{1}{2}$).

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$\varphi''(\mathrm{x})$	+	-
$\varphi(\mathrm{x})$		σκ (0,φ(0))

Από τα παραπάνω προκύπτει ο πίνακας

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$\varphi'(\mathrm{x})$	+	+
$\varphi''(\mathrm{x})$	+ 0	-
$\varphi(\mathrm{x})$		

B4

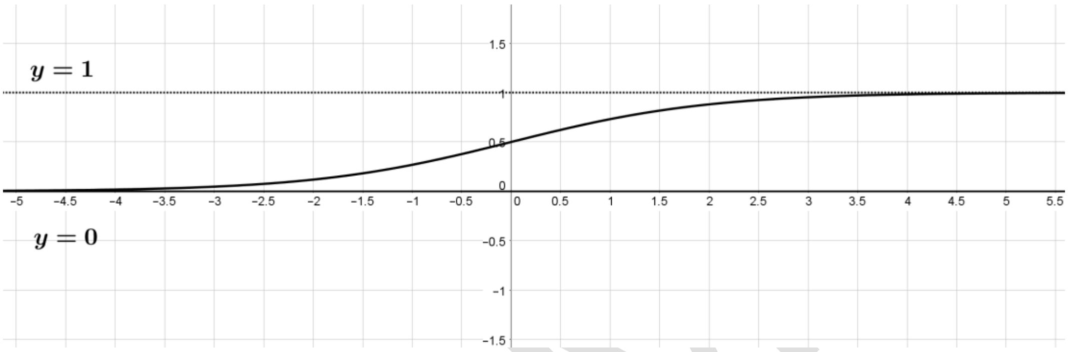
Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες υπολογίζουμε το

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ άρα y=0

δηλαδή ο άξονας x’x είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

άρα y=1 είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$



Θέμα Γ

Γ1.

Η εφαπτομένη της $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ στο σημείο της $\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$ έχει εξίσωση:

(ε): $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\overset{f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x}{\Leftrightarrow}y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$

Πρέπει $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\dfrac{\pi}{2}-x_0\right)$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\dfrac{\pi}{2}$ που είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, με προφανείς ρίζες στο $x_0=0$ και $x_1=\pi$.

οπότε και $g'(x)=\eta\mu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ (η g παραγωγίσιμη στο (0,π) ως πράξεις παραγωγισίμων).

$g'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0\overset{\eta\mu x>0,\ \text{για } x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}x=\dfrac{\pi}{2}$

$g'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}-x>0\Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\dfrac{\pi}{2}$ το $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}-\eta\mu\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-1>0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	+	ΟΜ	-
$g(x)$	ΟΕ $\nearrow$		$\searrow$ ΟΕ

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ και $x=\pi$, το $g(0)=g(\pi)=0$.

Άρα $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Άρα $g(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$ και $x=\pi$.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μόνο δυο λύσεις στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ τις $x=0$ και $x=\pi$.

Για $x_0=0$, η (1) γίνεται: $\varepsilon_1: y=-x$

Και για $x_0=\pi$, η (1) γίνεται: $\varepsilon_2: y=x-\pi$

Γ2.

$f''(x)=\eta\mu x>0$ για $x\in(0,\pi)$.

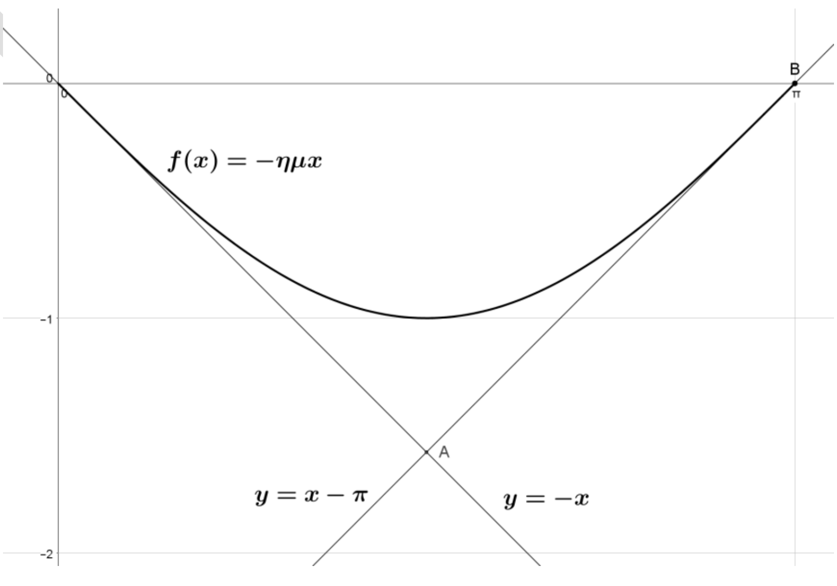
Άρα η f κυρτή στο $\left[0,\pi\right]$ και επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται ψηλότερα από τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 με εξαίρεση τα σημεία επαφής $x_0=0$ και $x_0=\pi$ αντίστοιχα. Επομένως για $x\in\left[0,\pi\right]$:

$f(x)\geq -x \Leftrightarrow f(x)+x\geq 0$ και $f(x)\geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\geq 0$.

$$E_2=\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx \overset{f(x)\leq 0}{=} \int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=1+1=2$$

$$E_1=(\mathrm{AOB})-E_2=\frac{1}{2}\pi\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Άρα $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$.



Γ3.

Είναι $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x+\pi} \overset{\left(\frac{\pi}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\pi^-}\left[\dfrac{1}{-\eta\mu x - x+\pi}(-\eta\mu x + x)\right] = +\infty$

Αφού από το ερώτημα Γ2 έχουμε $f(x)-(x-\pi)>0 \Leftrightarrow -\eta\mu x - x+\pi>0$ στο $(0,\pi)$.   Άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{-\eta\mu x - x+\pi} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu\pi+\pi)=\pi$

Γ4.

Από Γ2 ισχύει:

$$f(x)\geq x-\pi \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x}\geq 1-\frac{\pi}{x} \overset{\text{δεν είναι παντού ίσες}}{\tau\acute{o}\tau\varepsilon} \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx = \left[x-\pi\ln x\right]_1^e = e-1-\pi$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi)\end{cases} = \begin{cases}|x|^{4/3}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi)\end{cases} = \begin{cases}(-x)^{4/3}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

Η $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $[-1,0)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών

Η $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $(0,\pi)$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$.

Άρα η $f(x)$ συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της.

Στο διάστημα $[-1,0)$ είναι $f'(x)=\left((-x)^{4/3}\right)' = -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0$

Στο διάστημα $(0,\pi]$ είναι $f'(x)=\left(e^x\eta\mu x\right)' = e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x = e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$

(στο διάστημα $(0,\pi]$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$)

Στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{(-x)^{4/3}}{-x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{1/3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}\underset{D'HL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x}{1}=0+1=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Επομένως κρίσιμα σημεία της f (εκεί που η παράγωγος της f μηδενίζεται ή δεν ορίζεται) είναι τα σημεία 0 και $\frac{3\pi}{4}$

Δ2.

- Από ερώτημα Δ1 είναι $f'(x)<0$ για $x\in(-1,0)$
- Δεν ορίζεται το $f'(0)$
- Για $x\in(0,\pi)$:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0 \Leftrightarrow \sigma\varphi x>-1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x>\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)\overset{\sigma\varphi\searrow}{\Leftrightarrow} x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$$

- $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, $f(\pi)=0$

Αποδεικνύουμε: $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln e^{\frac{3\pi}{4}}>\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}>\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 3\pi>2\ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln e^{3\pi}>\ln 4 \Leftrightarrow e^{3\pi}>4$ που ισχύει.

Ο πίνακας μονοτονίας είναι ο παρακάτω:

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		-	‖	+	0	-	
$f(x)$	ΤΜ	↘	ΟΕ	↗	ΟΜ	↘	ΟΕ

- Άρα η f γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.
- Η f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.
- Η f έχει ολικό ελάχιστο στις θέσεις 0 και π την τιμή $0=m$

- Η f έχει ολικό μέγιστο στη θέση $\dfrac{3\pi}{4}$ την τιμή $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}=\mathrm{M}$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση -1 την τιμή 1.

Άρα $f(\Delta)=[\mathrm{m},\mathrm{M}]=\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3.

$$\mathrm{E}=\int_0^\pi |g(x)-f(x)|\,dx=\int_0^\pi \left|e^{5x}-e^x\eta\mu x\right|dx=\int_0^\pi e^x\left|e^{4x}-\eta\mu x\right|dx \quad (1)$$

Για $x\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq 0 \Leftrightarrow e^{4x}\geq e^0 \Leftrightarrow e^{4x}\geq 1$ και

$\eta\mu x\leq 1$ για κάθε $x\in R$, άρα $e^{4x}\geq \eta\mu x \Leftrightarrow e^{4x}-\eta\mu x\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Άρα (1) $\Leftrightarrow \mathrm{E}=\int_0^\pi\left(e^{5x}-e^x\eta\mu x\right)dx=\int_0^\pi e^{5x}dx-\int_0^\pi e^x\eta\mu x dx=\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_2=\dfrac{e^{5\pi}}{5}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{e^\pi+1}{2}$ τ.μον.

όπου $\mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2$:

- $\mathrm{I}_1=\int_0^\pi e^{5x}dx=\left[\dfrac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi=\dfrac{e^{5\pi}}{5}-\dfrac{1}{5}$
- $\mathrm{I}_2=\int_0^\pi e^x\eta\mu x dx=\int_0^\pi\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow$

$$\mathrm{I}_2=\cancel{\left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi}-\int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow \mathrm{I}_2=-\int_0^\pi\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow \mathrm{I}_2=-\left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx\right)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{I}_2=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\mathrm{I}_2 \Leftrightarrow 2\mathrm{I}_2=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi=-e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi+e^0\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{I}_2=\frac{e^\pi+1}{2}$$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(\mathrm{x})-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}\overset{\cdot(e^{\frac{3\pi}{4}})}{\Leftrightarrow}16f(\mathrm{x})-(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow 16f(\mathrm{x})-8\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}=(4\mathrm{x}-3\pi)^2\Leftrightarrow$$

$$16f(\mathrm{x})-16f(\frac{3\pi}{4})=(4\mathrm{x}-3\pi)^2\Leftrightarrow 16\left(f(\mathrm{x})-f(\frac{3\pi}{4})\right)=(4\mathrm{x}-3\pi)^2$$

Όμως στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$ η συνάρτηση $f(\mathrm{x})$ παρουσιάζει μέγιστο άρα $f(\mathrm{x})\leq f(\dfrac{3\pi}{4})\Leftrightarrow f(\mathrm{x})-f(\dfrac{3\pi}{4})\leq 0$

για κάθε $x\in A_f$ και $(4\mathrm{x}-3\pi)^2\geq 0$ για κάθε $x\in R$

Άρα η ισότητα ισχύει όταν $4\mathrm{x}-3\pi=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$