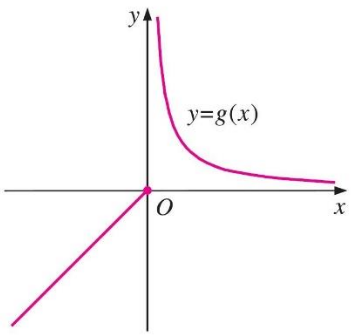
Πανελλαδικές εξετάσεις 2018
Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα «Μαθηματικά Ο.Π »

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο σελίδα 99)

Α2. α) ΨΕΥΔΗΣ

β) (Αντιπαράδειγμα σχολικό σελ 35) η $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Α3. Θεώρημα Θ.Ο.Λ. (Σχολικό βιβλίο σελίδα 216)

Α4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

Θέμα Β

Β1.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως ρητή.

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=\left(\frac{x^3-4}{x^2}\right)'=\frac{(x^3-4)'x^2-(x^3-4)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{3x^2x^2-(x^3-4)2x}{x^4}=\frac{3x^4-2x^4+8x}{x^4}=$$

$$=\frac{x^4+8x}{x^4}=\frac{x^3+8}{x^3}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x=-2.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		-		-	0	+	
$x+2$		-	0	+		+	
x^2-2x+4		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)>0 \Leftrightarrow x^3\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(0,+\infty\right)$$

f συνεχής για $x\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ άρα

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}<0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)<0 \Leftrightarrow x^3\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-2,0\right)$$

f συνεχής για $x\in\left(-2,0\right)$ άρα

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-2,0\right)$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=-2$ με τιμή $f\left(-2\right)=-2-\dfrac{4}{(-2)^2}=-3$

Ο πίνακας μονοτονίας-ακροτάτων δίνεται παρακάτω:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	
$f(x)$		↗	ΤΜ	↘	‖	↗	

Β2.

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{\left(x^3+8\right)'x^3-\left(x^3+8\right)\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^2x^3-\left(x^3+8\right)3x^2}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=\frac{-24}{x^4}<0$$

για καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$\frown$	‖	$\frown$

Επομένως η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

B3

(κατακόρυφες ασύμπτωτες)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}x-\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^2}=0-(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}x-\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^2}=0-(+\infty)=-\infty$$

Επομένως η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\underline{x=0}$

(πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες: $y=\lambda x+\beta$)

Για $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1-0=1 \text{ άρα } \lambda=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0 \text{ άρα } \beta=0.$$

Επομένως η f έχει ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\underline{y=x}$ καθώς $x\to-\infty$.

Για $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1-0=1 \text{ άρα } \lambda=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0 \text{ άρα } \beta=0.$$

Επομένως η f έχει ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\underline{y=x}$ καθώς $x\to+\infty$.

Β4.

Ο πίνακας μονοτονίας και κυρτότητας είναι ο παρακάτω:

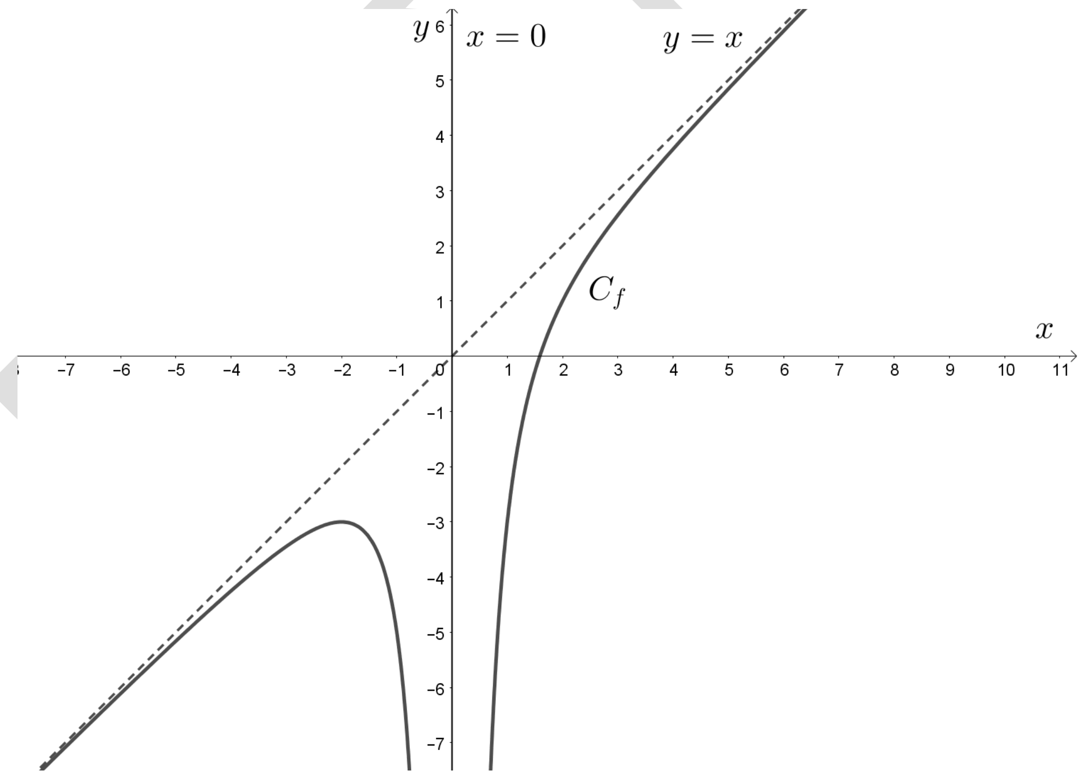
x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↘	‖	↗
$f''(x)$	⌒		⌒	‖	⌒
$f(x)$	↗ ⌒	ΤΜ	↘ ⌒	‖	↗ ⌒

- Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $y=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x-\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^3-4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^3-4=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

- Η C_f δεν τέμνει τον $y'y$ αφού $x \neq 0$.

Από τα παραπάνω η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Θέμα Γ

Γ1.

Έστω l_1 η περίμετρος του τετραγώνου πλευράς α και l_2 το μήκος του κύκλου ακτίνας ρ.

Τότε: $l_1 = x$ και $l_2 = 8-x$, με $x>0$ και $8-x>0 \Leftrightarrow x<8$. Άρα $x\in(0,8)$.

Το τετράγωνο έχει πλευρά $\alpha=\dfrac{x}{4}$ επομένως το εμβαδόν του είναι $\mathrm{E}_1(x)=\left(\dfrac{x}{4}\right)^2=\dfrac{x^2}{16}$.

Ο κύκλος έχει μήκος $l_2 = 8-x \Leftrightarrow 2\pi\rho = 8-x \Leftrightarrow \rho=\dfrac{8-x}{2\pi}$, επομένως το εμβαδόν του είναι

$$\mathrm{E}_2(x)=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 .$$

Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(x)=\mathrm{E}_1(x)+\mathrm{E}_2(x)=\frac{x^2}{16}+\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{16}+\frac{\pi(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=$$

$$=\frac{\pi x^2+4\left(x^2-16x+64\right)}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8) .$$

Γ2.

Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $x\in(0,8)$ ως πολυωνυμική.

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right),\ x\in(0,8) .$$

$$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)=0\Leftrightarrow 2(\pi+4)x-64=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}\in(0,8).$$

$$\mathrm{E}'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4} \text{ και } \mathrm{E}'(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{32}{\pi+4} .$$

x	0		$\dfrac{32}{\pi+4}$		8
$\mathrm{E}'(x)$		-	0	+	
$\mathrm{E}(x)$		↘		↗	

ΟΕ

Άρα η $\mathrm{E}(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{32}{\pi+4}$

οπότε $\alpha = \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}$ (1)

$$2\rho = 2\frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4} \quad (2)$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε $\alpha = 2\rho$.

Γ3.

Αναζητούμε μοναδική λύση για την εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ και επομένως θα βρούμε το σύνολο τιμών της $\mathrm{E}(x)$.

- Η $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$. Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Delta_1) = \left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x)\right) = \left[\frac{16}{4+\pi}, \frac{16}{\pi}\right) .$$

$$\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{4+\pi}\right]$$

$$\left[\lim_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)0 - 64\cdot 0 + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}\right]$$

Είναι: $\frac{16}{\pi} > 5 \Leftrightarrow 16 > 5\pi \Leftrightarrow \pi < \frac{16}{5} \Leftrightarrow \pi < 3{,}2$ που ισχύει.

$\frac{16}{4+\pi} < 5 \Leftrightarrow 16 < 20 + 5\pi \Leftrightarrow 5\pi + 4 > 0$ που ισχύει.

Επομένως αφού η $\mathrm{E}(x)$:

  - Είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$
  - $5 \in \mathrm{E}(\Delta_1)$

Θα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}(\xi)=5$, όμως το ξ μοναδικό αφού η $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα και 1-1.

- Η $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2 = \left(\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$. Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Delta_2) = \left(\lim_{x \to \frac{32}{\pi+4}^+} \mathrm{E}(x), \lim_{x \to 8^-} \mathrm{E}(x) \right) = \left(\frac{16}{4+\pi}, 4 \right),$$

[$\displaystyle\lim_{x \to \frac{32}{\pi+4}^+} \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right)$ διότι η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής στο $(0,8)$]

$$\left[\lim_{x \to 8^-} \mathrm{E}(x) = \lim_{x \to 8^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)64 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4 \right]$$

Επειδή το $5 \notin \left(\dfrac{16}{4+\pi}, 4\right)$ η εξίσωση $\mathrm{E}(x) = 5$ είναι αδύνατη στο διάστημα $\left(\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$

Κατά συνέπεια βρήκαμε μοναδική λύση της εξίσωσης $\mathrm{E}(x) = 5$ στο $(0,8)$.

Θέμα Δ

Δ1.

$f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in R$, $a > 1$

Η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = (2e^{x-a} - x^2)' = 2e^{x-a} - 2x$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) = (2e^{x-a} - 2x)' = 2e^{x-a} - 2 = 2(e^{x-a} - 1)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^{x-a} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2(e^{x-a} - 1) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < a$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗
		ΣΚ	

Άρα για κάθε τιμή του $a > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής στο $x_0 = a$, με $f(a) = 2e^0 - a^2 = 2 - a^2$, το $\mathrm{A}(a, 2 - a^2)$.

Δ2.

Αφού $f''(\mathrm{x})<0$ στο διάστημα $(-\infty,a)$ η $f'(\mathrm{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,a]$

Αφού $f''(\mathrm{x})>0$ στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$ η $f'(\mathrm{x})$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$

x	$-\infty$ 1	α	$+\infty$
$f''(\mathrm{x})$	-	0	+
$f'(\mathrm{x})$	↘		↗

Στο $\Delta_1=(-\infty,a]$ η $f'(\mathrm{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(\mathrm{x})\right)=[2-2\alpha,+\infty)$$

[$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-a}-2x)=0-(-\infty)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-a}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$]

Στο $\Delta_2=(a,+\infty)$ η $f'(\mathrm{x})$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f'(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(\mathrm{x})\right)=\left(f'(a),\lim_{x\to+\infty}f'(\mathrm{x})\right)=(2-2\alpha,+\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f'(x)=f'(a)$ αφού f' συνεχής στο a

$$\lim_{x\to+\infty}f'(\mathrm{x})=\lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-a}}{x}-1\right)\right]=+\infty(+\infty)=+\infty \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-a}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DHL}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-a}}{1}=\lim_{t\to+\infty}e^{t}=+\infty$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες.

Ισχύει $\alpha>1\Leftrightarrow 2\alpha>2\Leftrightarrow 2-2\alpha<0$

$0\in f'(\Delta_1)=[2-2a,+\infty)$ και f' γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1=(-\infty,a]$ ώστε $\underline{f'(x_1)=0}$.

$0\in f'(\Delta_2)=(2-2a,+\infty)$ και f' γνησίως αύξουσα στο Δ_2 .

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2=(a,+\infty)$ ώστε $\underline{f'(x_2)=0}$.

Οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες x_1,x_2 με $x_1<a<x_2$.

- Για $x<x_1\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0$
- Για $x_1<x<a\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x_1)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x)<0$
- Για $a<x<x_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)<0$

- Για $x > x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'\left(x_2\right) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$

- Στα διαστήματα $\left(-\infty, x_1\right]$ και $\left[x_2, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα
- στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
- στη θέση x_1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, ενώ στη θέση x_2 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Δ3.

$f'(1) = 2(e^{1-a} - 1) < 0$
$f'(x_1) = 0$

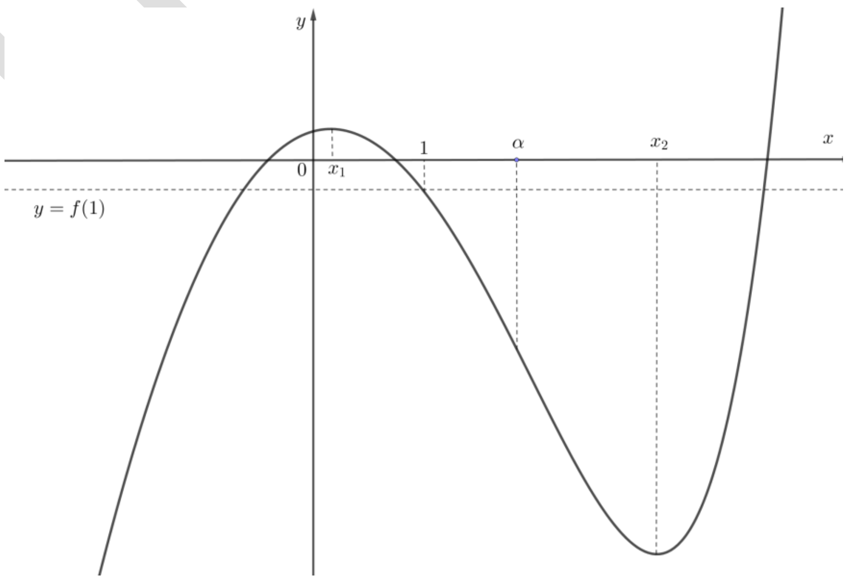
Στο διάστημα $\left(-\infty, a\right]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα

Αφού $f'(1) < f'(x_1) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} 1 > x_1$. Άρα: $\underline{x_1 < 1 < a < x_2}$

Στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ η f γνησίως φθίνουσα άρα 1-1

Οπότε $f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$ μοναδική λύση.

Αλλά $1 \notin \left(\alpha, x_2\right)$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $\left(\alpha, x_2\right)$.



Δ4.

Για $\alpha = 2$

- $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$
- $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$
- $f(2) = -2$
- $f'(2) = -2$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2, f(2))$ δίνεται από την εξίσωση:

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2,3]$ θα ισχύει $f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$

(Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$)

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ (1)

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα: $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2} = u \Rightarrow x - 2 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 + 2$, οπότε $dx = 2udu$

Για $x = 2 \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 3 \Leftrightarrow u = 1$.

Επομένως $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = \int_0^1 (-2u^2 - 4 + 2)\cdot u \cdot 2udu = \int_0^1 (-2u^2 - 2)\cdot 2u^2 du = \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2)du =$

$$= \left[\frac{-4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-12-20}{15} = \frac{-32}{15}$$

Επομένως από (1) $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \frac{-32}{15}$.