Πανελλαδικές εξετάσεις 2015

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα «Μαθηματικά Ι - ΕΠΑΛ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο, σελ. 212

Α2. α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Λ , ε) Σ

Α3. α) $\int_{a}^{b} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{a}^{b} = \ln b - \ln a$, με $b > a > 0$

β) $(c)' = 0$, αν c: σταθερά

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \ldots, v_k$, τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i v_i}{v}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης k_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$k_i \cdot v_i$
[5,15)	10	20	20	200
[15,25)	20	14	34	280
[25,35)	30	12	46	360
[35,45)	40	4	50	160
ΣΥΝΟΛΑ		$v=50$		1000

$k_1 = \frac{5+15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$k_2 = \frac{15+25}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$k_3 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$

$k_4 = \frac{35+45}{2} = \frac{80}{2} = 40$

$N_1 = v_1 = 20$

$v_2 = N_2 - v_1 = 34 - 20 = 14$

$N_3 = N_2 + v_3 = 34 + 12 = 46$

$N_4 = v = 50$

$v_4 = N_4 - N_3 = 50 - 46 = 4$

Πανελλαδικές εξετάσεις 2015

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα «Μαθηματικά Ι - ΕΠΑΛ»

$k_1 \cdot v_1 = 10 \cdot 20 = 200$

$k_2 \cdot v_2 = 20 \cdot 14 = 280$

$k_3 \cdot v_3 = 30 \cdot 12 = 360$

$k_4 \cdot v_4 = 40 \cdot 4 = 160$

$\sum k_i \cdot v_i = 200 + 280 + 360 + 160 = 1000$

Β2. $\bar{x} = \dfrac{\sum k_i \cdot v_i}{v} = \dfrac{1000}{50} = 20$

Β3. $S^2 = \dfrac{v_1(k_1 - \bar{x})^2 + v_2(k_2 - \bar{x})^2 + v_3(k_3 - \bar{x})^2 + v_4(k_4 - \bar{x})^2}{v} =$

$= \dfrac{20(10-20)^2 + 14(20-20)^2 + 12(30-20)^2 + 4(40-20)^2}{50} =$

$= \dfrac{20 \cdot 100 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 100 + 4 \cdot 400}{50} = \dfrac{2000 + 1200 + 1600}{50} =$

$= \dfrac{4800}{50} = 96$

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{96} \simeq 10$

Β4. $CV\% = \dfrac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{10}{20} \cdot 100 = 50\%$

Άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda}, & \text{αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$$

Γ1. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (4x + 4e^{x-2}) = 4 \cdot 2 + 4e^{2-2} = 8 + 4 \cdot e^0 = 8 + 4 \cdot 1 = 12$

Γ2. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} = \dfrac{2^3 - 8}{\lambda \cdot 2 - 2\lambda} = \dfrac{0}{0}$ Απροσδιόριστη Μορφή

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\lambda\cancel{(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{\lambda} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{\lambda} = \frac{4+4+4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$$

Γ3. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=2$ πρέπει $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$f(2) = 4\cdot 2 + 4\cdot e^{2-2} = 4\cdot 2 + 4\cdot e^0 = 8 + 4\cdot 1 = 8+4 = 12$$

Άρα $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 12 = \frac{12}{\lambda} = 12 \Leftrightarrow \frac{12}{\lambda} = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\cdot\lambda = 12 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

Γ4. $$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (4x + 4e^{x-2})\,dx = \left[2x^2 + 4e^{x-2}\right]_1^2 =$$

$$= (2\cdot 2^2 + 4\cdot e^{2-2}) - (2\cdot 1^2 + 4\cdot e^{1-2}) = 8 + 4\cdot e^0 - (2+4e^{-1}) =$$
$$= 8 + 4 - 2 - 4e^{-1} = 10 - 4e^{-1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $B'(t) = -t^2 + 4t + 12$

Δ2. $B'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 16 + 48 = 64$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4\pm 8}{-2} = \begin{cases} \frac{-4+8}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \\ \frac{-4-8}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \end{cases}$$

Η λύση $t=-2$ απορρίπτεται, γιατί $t \geq 0$. Άρα, $t=6$.

t	0		6		10
$B'(t)$		+	0	−	
$B(t)$		↗		↘	

Άρα, για $t=6$ έτη το παγόβουνο έχει μέγιστο βάρος.

Δ3. Στο διάστημα $(6,10)$, η $B(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα για $6 \le t \le 9 \Leftrightarrow B(6) \ge B(t) \ge B(9) \Leftrightarrow B(9) \le B(t) \le B(6)$

Δ4. $B''(t) = -2t+4$

$B''(t)=0 \Leftrightarrow -2t+4=0 \Leftrightarrow -2t=-4 \Leftrightarrow t=2$

t	0		2		10
$B''(t)$		+	0	−	
$B'(t)$		↗		↘	

$B''(t)>0 \Leftrightarrow -2t+4>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2t>-4 \Leftrightarrow t<2$

Άρα, για $t=2$ έτη ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος.