Πανελλαδικές εξετάσεις 2017

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα «Μαθηματικά Γενικής Παιδείας»

Θέμα Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 14

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 72

Α4. **α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος**

Θέμα Β

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	N_i	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i$
1	2	2	2	9	18
3	3	9	5	1	3
5	4	20	9	1	4
9	1	9	10	25	25
Σύνολο	10	40	----	----	50

Β1.

α. $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i=\frac{1}{10}40=4$.

β. $\nu=10$ άρτιος, άρα $\delta=\frac{t_5+t_6}{2}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$.

γ. $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{50}{10}=5$.

Β2.

$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{5}$.

$CV=\frac{s}{\left|\bar{x}\right|}=\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{1}{10}$ άρα $CV>10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{5}{16}>\frac{1}{100}\Leftrightarrow 500>16 \text{ που ισχύει}}$$

Θέμα Γ

$f(x)=x^2-x+1,\ \ \mathrm{A}_f=R$.

Γ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

$f'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\dfrac{1}{2}$ το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Γ2.

$f(2)=2^2-2+1=4-2+1=3$, άρα το σημείο $\mathrm{A}\left(2, f(2)\right)$ είναι το $\mathrm{A}(2,3)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2,3)$ είναι : $(\varepsilon):\ y=\lambda x+\beta$ (1).

$\lambda=f'(2)=2\cdot 2-1=3$.

Άρα $(\varepsilon):\ y=3x+\beta \overset{\mathrm{A}\in(\varepsilon)}{\Leftrightarrow} 3=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$.

Επομένως $(\varepsilon):\ y=3x-3$.

Γ3.

- Η (ε) τέμνει τον $x'x$ για $y=0$.

  $0=3x-3 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$. Άρα το σημείο τομής είναι το $\mathrm{K}(1,0)$.

- Η (ε) τέμνει τον $y'y$ για $x=0$.

  $y=0-3=-3$. Άρα το σημείο τομής είναι το $\Lambda(0,-3)$.

Γ4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

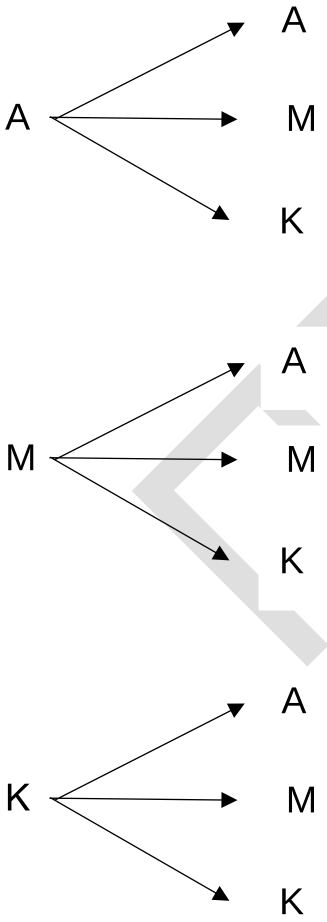
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1^2-1+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Θέμα Δ

Δ1.

Συμβολίζουμε με Α την άσπρη, Μ την μαύρη και Κ την κόκκινη μπάλα.

Το δενδροδιάγραμμα του πειράματος είναι το παρακάτω:



Άρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega=\{\mathrm{AA},\mathrm{AM},\mathrm{AK},\mathrm{MA},\mathrm{MM},\mathrm{MK},\mathrm{KA},\mathrm{KM},\mathrm{KK}\}$, με πλήθος στοιχείων $\mathrm{N}(\Omega)=9$.

Δ2.

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{AM}, \mathrm{MM}, \mathrm{KM}\}$$

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{AM}, \mathrm{AK}, \mathrm{MA}, \mathrm{MK}, \mathrm{KA}, \mathrm{KM}\}$$

Δ3.

α)

- $\mathrm{A}' = \{\mathrm{AA}, \mathrm{AK}, \mathrm{MA}, \mathrm{MK}, \mathrm{KA}, \mathrm{KK}\}$

  $$P(\mathrm{A}') = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A}')}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{AM}, \mathrm{KM}\}$

  $$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

- $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{\mathrm{MM}\}$

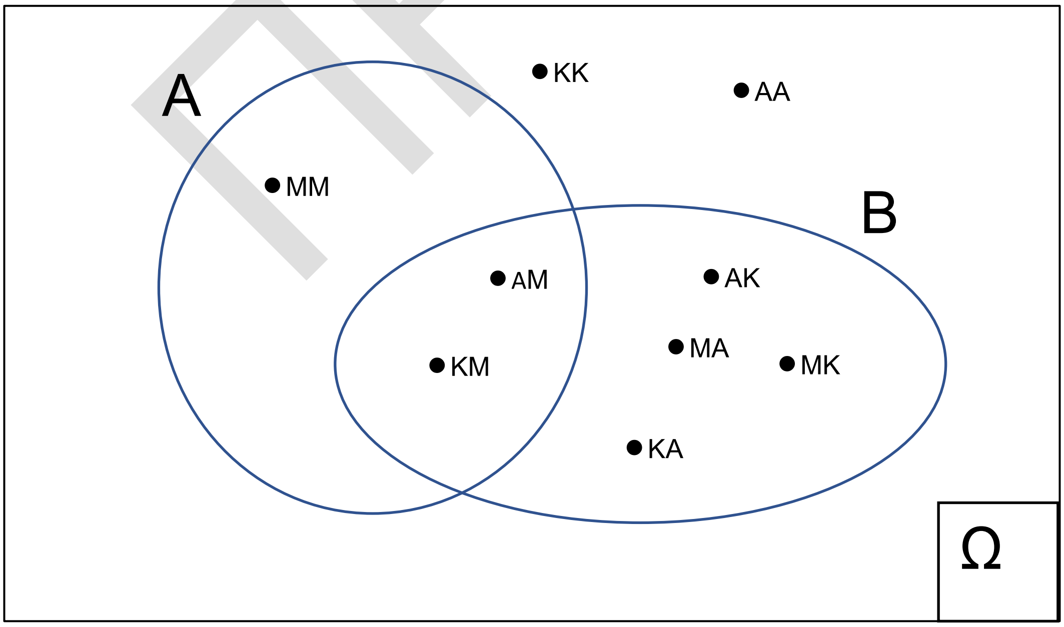
  $$P(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

- $\mathrm{B} - \mathrm{A} = \{\mathrm{AK}, \mathrm{MA}, \mathrm{MK}, \mathrm{KA}\}$

  $$P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{B} - \mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

β)

Το διάγραμμα Venn του πειράματος είναι το παρακάτω:



Αφού το Γ είναι ασυμβίβαστο τόσο με το A , όσο και με το B αρκεί $\Gamma \subseteq (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$ (1).

$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = \{\mathrm{KK}, \mathrm{AA}\}$

$$P\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\right] = \frac{\mathrm{N}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\right]}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

Άρα από (1) $\Rightarrow P(\Gamma) \leq P\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\right] \Leftrightarrow P(\Gamma) \leq \dfrac{2}{9}$.

Άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$ είναι $\dfrac{2}{9}$.