Πανελλαδικές εξετάσεις 2015

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**»**

Θέμα Α

Α1. Βιβλίο σχολείου σελ 31 (απόδειξη)

Α2. Βιβλίο σχολείου σελ 22 (ορισμός)

Α3. Βιβλίο σχολείου σελ 87 (ορισμός)

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1.

Οι λύσεις της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{4}$

$A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$ και επειδή είναι διαφορετικά ανά δυο τότε $P(A\cap B)<P(A)<P(A\cup B)$

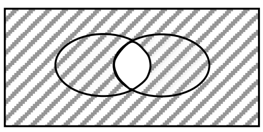
άρα $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2.

Από προσθετικό νόμο $P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ (1)

$$P(A'-B')=P(A'\cap(B')')=P(B\cap A')=P(B-A)\overset{(1)}{=}P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



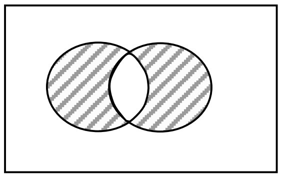
$\Delta=\left(A\cap B\right)'$

Β3.

Τα σύνολα Α-Β , Β-Α είναι ασυμβίβαστα άρα από απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$\mathrm{P}[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})]=\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$



$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})$

Β4.

Οι λύσεις της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$ είναι $x_1=\frac{2}{3}$ και $x_2=-\frac{1}{3}$ (απορρίπτεται αφού $0\le P(\Gamma)\le 1$)

άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$

Έστω ότι Β, Γ είναι ασυμβίβαστα, τότε από τον απλό προσθετικό νόμο ισχύει:

$P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=P(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1$ άτοπο διότι $0\le P(\mathrm{B}\cup\Gamma)\le 1$

έτσι τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα .

Θέμα Γ

Γ1.

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%, άρα $f_1\%=10\%$
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%, άρα $f_5\%=30\%$
- $\alpha_3=108^0 \Leftrightarrow f_3\cdot 360^0=108^0 \Leftrightarrow f_3=\frac{108^0}{360^0}=0,3 \Leftrightarrow f_3\%=30\%$
- Από τις κλάσεις στον πίνακα οι κεντρικές τιμές είναι: $x_1=9,\ x_2=11,\ x_3=13,\ x_4=15,\ x_5=17$

Επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \Leftrightarrow f_2+f_4=1-f_1-f_3-f_5=1-0,1-0,3-0,3=0,3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_2+f_4=0,3$ (1)

Από τη μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{x}=14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i =14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i =14 \Leftrightarrow x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 14 \Leftrightarrow$$

$$9\cdot 0{,}1 + 11\cdot f_2 + 13\cdot 0{,}3 + 15\cdot f_4 + 17\cdot 0{,}3 = 14 \Leftrightarrow$$

$$11\cdot f_2 + 15\cdot f_4 = 4{,}1 \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1) και (2) έχουμε $f_2 = 0{,}1 \Leftrightarrow f_2\% = 10\%$ και $f_4 = 0{,}2 \Leftrightarrow f_4\% = 20\%$

Και επομένως ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	f_i	$f_i\%$	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i$
[8,10)	9	0,1	10	0,9	25	2,5
[10,12)	11	0,1	10	1,1	9	0,9
[12,14)	13	0,3	30	3,9	1	0,3
[14,16)	15	0,2	20	3	1	0,2
[16,18)	17	0,3	30	5,1	9	2,7
Σύνολο	-	1	100	14	-	6,6

Γ2.

$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 f_i = 6{,}6$ (από τον πίνακα)

Άρα $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{6{,}6}\simeq 2{,}57$

$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2{,}57}{14}\simeq 0{,}18>0{,}1$ και επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

$$\bar{x}=14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i + x_5\nu_5\right)=14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu}+\frac{x_5\nu_5}{\nu}=14 \Leftrightarrow \frac{1780}{\nu}+17\cdot 0{,}3=14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu = 200$$

Γ4.

Είναι: $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \overline{\alpha}}{s_\alpha} = \dfrac{1}{s_\alpha}\alpha_i + \dfrac{1}{s_\alpha}\overline{\alpha}$

Σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλίου (σελ. 99) έχουμε:

- $\overline{\beta} = \dfrac{1}{s_\alpha}\overline{\alpha} - \dfrac{1}{s_\alpha}\overline{\alpha} = 0$
- $s_\beta = \left|\dfrac{1}{s_\alpha}\right| s_\alpha \overset{s_\alpha > 0}{=} \dfrac{1}{s_\alpha} s_\alpha = 1$

Θέμα Δ

Δ1.

$\hat{\mathrm{A}} = 90^0$ και εγγεγραμμένη άρα βαίνει σε ημικύκλιο.

Οπότε $\mathrm{B}\Delta = 2\rho \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = 10$

Στο ορθογώνιο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$, από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{B}\Delta^2 \Leftrightarrow x^2 + \mathrm{A}\Delta^2 = 100 \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta = \sqrt{100 - x^2}$ με

$100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow -10 < x < 10 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 10$.

Οπότε $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A}\Delta = x\sqrt{100 - x^2}$ άρα:

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

Δ2.

Η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με

$$f'(x) = \left(x\sqrt{100 - x^2}\right)' = (x)' \cdot \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot \left(100 - x^2\right)' =$$

$$= \sqrt{100 - x^2} + \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \ .$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \overset{\sqrt{100-2x^2} > 0}{\Leftrightarrow} 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 50 \Leftrightarrow |x| < 5\sqrt{2} \Leftrightarrow -5\sqrt{2} < x < 5\sqrt{2}$$

Ο πίνακας μονοτονίας παίρνει την παρακάτω μορφή:

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,5\sqrt{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[5\sqrt{2},10\right)$,

άρα για $x=5\sqrt{2}$ το εμβαδό γίνεται μέγιστο και ακόμα $\mathrm{A\Delta}=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Άρα $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}=5\sqrt{2}$ οπότε το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι τετράγωνο.

Δ3.

(α’ τρόπος)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}\overset{f(1)=\sqrt{99}}{=}\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{98}\cdot\frac{100-2}{\sqrt{100-1}}=\frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}=\frac{3\sqrt{11}}{99}=\frac{\sqrt{11}}{33}$$

(β’ τρόπος)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}+x\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{x}=$$

$$=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{x}+\frac{x\sqrt{100-(1+x)^2}}{x}\right]=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}^{\,2}-\sqrt{99}^{\,2}}{x\left(\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right)}+\sqrt{100-(1+x)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\left[\frac{100-1-2x-x^2-99}{x\left(\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right)}+\sqrt{100-(1+x)^2}\right]=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\left[\frac{x(-2-x)}{x\left(\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right)}+\sqrt{100-(1+x)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\left(\frac{-2}{2\sqrt{99}}+\sqrt{99}\right)=\frac{1}{98}\cdot\left(\frac{-1+99}{\sqrt{99}}\right)=\frac{\sqrt{99}}{99}=\frac{3\sqrt{11}}{99}=\frac{\sqrt{11}}{33}$$

Δ4.

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B}\subseteq \mathrm{A}$ και επειδή $P\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)>0$ ισχύει:

$$0<P\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)\le P(\mathrm{A})\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2\le\left[P(\mathrm{A})\right]^2\le 1\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0>-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2\ge-\left[P(\mathrm{A})\right]^2\ge -1\overset{+100}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 100>100-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2\ge 100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2\ge 99\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{100}>\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2}\ge\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}\ge\sqrt{99}\Leftrightarrow$$

$$0<\frac{1}{10}<\frac{1}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2}}\le\frac{1}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}<1$$

Άρα έχουμε:

$$0<\frac{1}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2}}<1\overset{\cdot P(\mathrm{A})>0}{\Leftrightarrow}0<\frac{P(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2}}<P(\mathrm{A})\le 1 \quad (1)$$ και

$$0<\frac{1}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}}<1\overset{\cdot P(\mathrm{A}-\mathrm{B})>0}{\Leftrightarrow}0<\frac{P(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}}<P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\le 1 \quad (2)$$

Στο διάστημα $\left(0,1\right]\subseteq\left(0,5\sqrt{2}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$f\left(\frac{P(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}}\right)\le f\left(\frac{P(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-B)\right]^2}}\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}\frac{P(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}}\le\frac{P(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-B)\right]^2}}\overset{\text{απαλοιφή}}{\Leftrightarrow}$$

$$P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A}-B)\right]^2}\le P(\mathrm{A})\cdot\sqrt{100-\left[P(\mathrm{A})\right]^2}\Leftrightarrow f\left[P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]\le f\left[P(\mathrm{A})\right]\underset{0<P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\le P(\mathrm{A})\le 1}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}}$$

$\Leftrightarrow P(\mathrm{A}-\mathrm{B})\le P(\mathrm{A})$ που ισχύει, γιατί $\mathrm{A}-\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}$.