Πανελλαδικές εξετάσεις 2015

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ »

Θέμα Α

Α1

Απόδειξη βιβλίο σχολείου σελ(194)

Α2

Ορισμός βιβλίο σχολείου σελ(188)

Α3

Ορισμός βιβλίο σχολείου σελ(150)

Α4

Σ-Λ

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1

$$|z-4| = 2|z-1| \Rightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\overline{z} = 12 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2

Β2

α) Από Β1 γνωρίζουμε ότι $z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{4}{z}$ (1)

άρα $\overline{w} = \frac{2\overline{z_1}}{z_2} + \frac{2\overline{z_2}}{z_1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \overline{w} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = 2\frac{z_2}{z_1} + 2\frac{z_1}{z_2} = w$ έτσι αφού $w = \overline{w}$ τότε ο w είναι πραγματικός .

β)

$$|\mathrm{w}|=|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}|\le 2|\frac{z_1}{z_2}|+2|\frac{z_2}{z_1}|=2\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\frac{|z_2|}{|z_1|}\overset{|z|=2}{=}2+2=4$$

άρα $|\mathrm{w}|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4$ με $w\in\mathbb{R}$

B3

Αν $w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow 2{z_1}^2+2{z_2}^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow {z_1}^2+{z_2}^2=-2z_1z_2 \Leftrightarrow {z_1}^2+2z_1z_2+{z_2}^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$

έτσι αφού $z_3=2iz_1$

$(\mathrm{A\Gamma})=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$

$(\mathrm{B\Gamma})=|-z_1-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$

$(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ

Θέμα Γ

Γ1.

Η συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων (εκθετικής και πολυωνυμικής) με

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\ge 0 \text{ για κάθε } x\in R$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Ο πίνακας μονοτονίας παίρνει τη μορφή:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	+
$f(x)$	↗		↗

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι επομένως γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$ και

$$f(x):\left(-\infty,+\infty\right)\xrightarrow{f\nearrow}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

Γ2.

Η συνάρτηση $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in R$ και επομένως 1-1.

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow e^3\,\frac{(x^2+1)}{e^x}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{3} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{3}$$

Η $f(x)$ συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών και $\frac{e^3}{2} \in f\left(D_f\right)=\left(0,+\infty\right)$, επομένως επειδή το $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(x)$ υπάρχει $\xi \in R$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{e^3}{2}$ και ξ μοναδικό αφού η $f(x)$ γνησίως μονότονη.

Γ3.

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt$$

Ισχύει $2x \le t \le 4x$ για κάθε $x>0$

Άρα $\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x) \le f(t) \le f(4x)$ (και το = ισχύει μόνο όταν $t=2x$ ή $t=4x$)

οπότε $f(4x)-f(t)\ge 0$ και άρα

$$\int_{2x}^{4x}\left(f(4x)-f(t)\right)dt>0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(4x)dt-\int_{2x}^{4x} f(\mathrm{t})dt>0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(4x)dt>\int_{2x}^{4x} f(\mathrm{t})dt \Leftrightarrow$$

$$f(4x)\cdot(4x-2x)>\int_{2x}^{4x} f(\mathrm{t})dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt<2x\cdot f(4x)$$

Γ4.

Εξετάζουμε πρώτα τη συνέχεια της g στο $\left[0,+\infty\right)$.

- Για $x>0$, $g(x)=\frac{1}{x}\left(\int_1^{4x} f(t)dt-\int_1^{2x} f(t)dt\right)$.

  Επειδή η f συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ άρα και οι συναρτήσεις $\int_1^{4x} f(t)dt$ και $\int_1^{2x} f(t)dt$ παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς, άρα η g συνεχής ως πράξεις συνεχών.

- Για $x=0$, το $g(0)=2$.

  Θεωρώ την $\mathrm{H}(x)=\int_{2x}^{4x} f(t)dt$. Επειδή η $f(t)\in R$ και επιπλέον οι $g_1(x)=2x\in R$ και

  $g_2(x)=4x\in R$, άρα και η $\mathrm{H}(x)=\int_{2x}^{4x} f(t)dt=\int_{1}^{4x} f(t)dt-\int_{1}^{2x} f(t)dt$ ορίζεται στο R , και είναι

  παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής.

  $$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}=$$

  $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{1}^{4x} f(t)dt-\int_{1}^{2x} f(t)dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\quad\left[\text{είναι }\lim_{x\to 0^+}\left(\int_{1}^{4x} f(t)dt-\int_{1}^{2x} f(t)dt\right)=0\right]$$

  $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_{1}^{4x} f(t)dt-\int_{1}^{2x} f(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}\overset{f\text{ συνεχής}}{=}4f(0)-2f(0)=4\cdot 1-2\cdot 1=2$$

  Άρα $\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$ άρα η g συνεχής στο 0

Άρα η g συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Στο $(0,+\infty)$ η g παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\int_{1}^{4x} f(t)dt-\int_{1}^{2x} f(t)dt\right)+\frac{1}{x}\left(4f(4x)-2f(2x)\right)=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt+\frac{1}{x}\left(4f(4x)-2f(2x)\right)>0 \quad \text{διότι:}$$

- Από Γ3 έχουμε:

  $$\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)\overset{:x^2>0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt<\frac{2}{x}f(4x)\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt>-\frac{2}{x}f(4x)\Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt+\frac{1}{x}2f(4x)>0 \quad (1) \text{ και}$$

- για $x>0$: $4x>2x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(4x)>f(2x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{2}{x}f(4x)>\frac{2}{x}f(2x)\Leftrightarrow\frac{1}{x}\left(2f(4x)-2f(2x)\right)>0 \quad (2)$

  Άρα από (1) και (2) έχουμε $g'(x)>0\ \forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow$ η $g\nearrow$ στο $[0,+\infty)$.

Θέμα Δ

$f'(x)[e^{f(x)}+e^{-f(x)}]=2$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

Δ1.

$f'(x)[e^{f(x)}+e^{-f(x)}]=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow (e^{f(x)}-e^{-f(x)})'=(2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$

για x=0 έχουμε $e^{f(0)}-e^{-f(0)}=0+c \Leftrightarrow c=0$ άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)}-x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow |e^{f(x)}-x|=\sqrt{x^2+1}$ (1)

θεωρούμε h(x) = $e^{f(x)}-x$, $x\in R$ άρα από (1)

$|h(x)|=\sqrt{x^2+1}$ (2)

$h(x)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+1}=0$ αδύνατη

έτσι $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και επειδή συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

όμως $h(0)=e^{f(0)}-0=1>0$ άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

από (2) $\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$ (3)

είναι $x+\sqrt{x^2+1}>0$ αφού $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$ άρα $\sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$

άρα από (3) $\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ με A_f = R.

Δ2.

α) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο R

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}.\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1})}=$$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

$$f''(x)=(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})'=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(\sqrt{x^2+1})'=-\frac{1}{(x^2+1)}\frac{2x}{(2\sqrt{x^2+1})}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$

άρα η $f(\mathrm{x})$ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 0$ το A(0, $\mathrm{f}(0)$) δηλαδή το A(0,0)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Σ.Κ.

β) $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 | f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} | \mathrm{dx}$

παρατηρούμε ότι $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$ άρα η εφαπτομένη της C_f είναι (ε): $y - f(0) = f'(0)(\mathrm{x} - 0)$

άρα $y = x$

επειδή για $x \geq 0$ η $f(\mathrm{x})$ είναι κοίλη άρα η C_f είναι κάτω από την (ε): $y = x$ με εξαίρεση το σημείο επαφής O(0,0) άρα $f(\mathrm{x}) \leq \mathrm{x}$ για κάθε $\mathrm{x} \in [0, +\infty)$ άρα $f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \leq 0$

έτσι $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 | f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} | \mathrm{dx} = \int_0^1 (\mathrm{x} - \mathrm{f}(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$

$$= [\frac{x^2}{2}]_0^1 - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 (\mathrm{x})' \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \frac{1}{2} - [\mathrm{x}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}]_0^1 + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \left(x^2 + 1\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3.

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \right) \cdot \ln\left| f(x) \right| \right] \underset{f(x)>0}{\overset{0\cdot(-\infty)}{=}} \quad \left(\begin{array}{c} \text{για } x > 0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow \\ f(x) > 0 \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{x} \cdot (x \cdot \ln f(x)) \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left[e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\right]\underset{f\ \text{συνεχής}}{=}e^0\cdot\big(f(0)\big)^2=1\cdot 0=0$$

- $\left[\begin{array}{l}\text{Η συνάρτηση } \mathrm{K}(x)=\int_0^x f^2(t)dt \text{ συνεχής, διότι η } f^2(t) \text{ συνεχής ως σύνθεση συνεχών,}\\ \text{άρα η } \mathrm{K}(x)=\int_0^x f^2(t)dt \text{ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.}\end{array}\right]$

$$\lim_{x\to 0^+}\big(x\ln f(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{f(x)}f(x)\ln f(x)\right)=1\cdot 0=0$$

- $$\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{f(x)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+1}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\ln(f(x))\big)\underset{\left[\lim\limits_{u\to o^+}u=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0\right]}{\overset{\text{θέτω } f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}(u\ln u)=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\\ \displaystyle=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}}=\lim_{u\to o}(-u)=0\end{array}\right]$$

Δ4.

$$\frac{1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0$$

Θεωρώ την $g(x)=(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$ στο $[2,3]$.

- Η $g(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ (οι $f(t^2)$, $f^2(t)$ συνεχείς ως συνθέσεις συνεχών, άρα και οι $\int_0^{x-2}f(t^2)dt$, $\int_0^x f^2(t)dt$ παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς. Άρα και η $g(x)$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών)
- $g(2)=-\left(8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt<0$
- $g(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0$ διότι:

- o $0 \le f(t) \le t$ για κάθε $t \ge 0$

  άρα $f^2(t) \le t^2$ $\left[\text{και η ισότητα ισχύει μόνο για t=0}\right]$ άρα

  $$\int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt < 8 \Leftrightarrow -8+3\int_0^2 f^2(t)dt < 0$$

- o $f(x) < x$ για κάθε $x > 0$

  άρα $f(t^2) \le t^2$, $t \ge 0$

  άρα

  $$\int_0^1 f\left(t^2\right)dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(t^2\right)dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt < 1 \Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt > 0 \Leftrightarrow g(3) > 0$$

Άρα $g(2)\cdot g(3) < 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (2,3)$ ώστε $g(\xi) = 0$

Επειδή $\xi \in \left(2,3\right)$ επαληθεύει και την αρχική εξίσωση.