Πανελλαδικές εξετάσεις 2016

Ενδεικτικές απαντήσεις στο μάθημα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

Θέμα Α

Α1.

Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 151

Α2.

Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3.

Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 22

Α4.

- **α)** Σωστό
- **β)** Λάθος (είναι μέτρο θέσης)
- **γ)** Σωστό
- **δ)** Σωστό
- **ε)** Λάθος (γνησίως αύξουσα στο Δ)

Θέμα Β

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\quad x\in R$$

Β1.

Η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1\right)'=3\frac{x^2}{3}-\frac{5}{2}\cdot 2x+6=x^2-5x+6$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$$

$$x=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{2}=3\\[2mm]\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2-5x+6>0$$

$-\infty$		2		3		$+\infty$
	+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=2$ το $f(2)=\frac{8}{3}-10+12-1=\frac{11}{3}$

και στο $x=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3)=\frac{27}{3}-\frac{5}{2}\cdot 9+18-1=26-\frac{45}{2}=\frac{7}{2}$.

Β2.

$f(0)=-1$

$f'(0)=6$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}(0,-1)$ έχει τύπο:

(ε): $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(0)=6$.

Άρα $y=6x+\beta$.

$\mathrm{A}(0,-1)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -1=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$

Άρα (ε): $y=6x-1$.

Β3.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(x-6)\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x-6)=-1-6=-7$$

x^2-5x-6

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25+24=49$

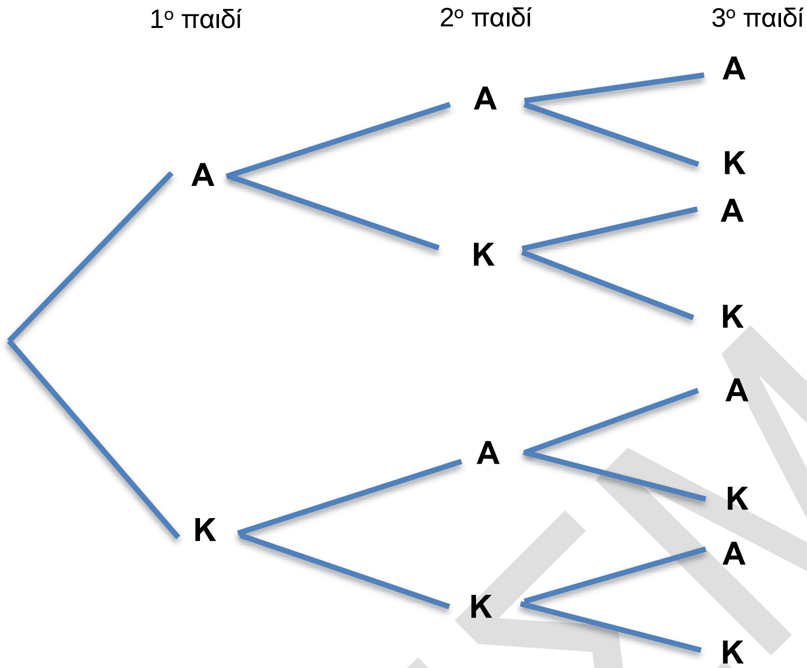
$$x=\frac{5\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{12}{2}=6\\ \frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

$x^2-5x-6=(x-6)\cdot(x-1)$

Θέμα Γ

Γ1.

Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο του πειράματος χρησιμοποιούμε δεντροδιάγραμμα.



Άρα ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία Α (αγόρι) και Κ (κορίτσι).

$\Omega=\{AAA,\ AAK,\ AKA,\ AKK,\ KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK\}$ και $N(\Omega)=8$

Γ2.

$A=\{KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK\},\quad N(A)=4$

$B=\{AKK,\ KAK,\ KKA,\ KKK\},\quad N(B)=4$

$\Gamma=\{AAA,\ AAK,\ KKA,\ KKK\},\quad N(\Gamma)=4$

Γ3.

α)

$\Delta=\{KAK,\ KKA,\ KKK\},\quad N(\Delta)=3$

$E=A\cup B=\{KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK,\ AKK\},\quad N(E)=5$

$Z=\Gamma-E=\{AAA,\ AAK\},\quad N(Z)=2$

Αφού τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα, εφαρμόζουμε κλασσικό ορισμό πιθανότητας.

$$P(\Delta) = \frac{\mathrm{N}(\Delta)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{E})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$P(\mathrm{Z}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{Z})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β)

$$\mathrm{H} = \left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right)' = \left\{\mathrm{AAA},\ \mathrm{AAK},\ \mathrm{AKA}\right\},\quad \mathrm{N}(\mathrm{H}) = 3$$

$$P(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{H})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$\Theta = \left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\right) \cup \left(\mathrm{B} - \mathrm{A}\right) = \left\{\mathrm{KAA}\right\} \cup \left\{\mathrm{AKK}\right\} = \left\{\mathrm{KAA},\ \mathrm{AKK}\right\},\quad \mathrm{N}(\Theta)=2$$

$$P(\Theta) = \frac{\mathrm{N}(\Theta)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1

Έστω $c > 0$ το πλάτος κάθε κλάσης.

Τότε οι δυο πρώτες κλάσεις είναι: $\left[8, 8+c\right)$ και $\left[8+c, 8+2c\right)$.

Οπότε ισχύει: $\frac{8+c+8+2c}{2} = x_2 \Leftrightarrow 16+3c = 2\cdot 14 \Leftrightarrow 3c = 28-16 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2.

Χρόνος σε λεπτά	x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
$\left[8,12\right)$	10	20	200
$\left[12,16\right)$	14	15	210
$\left[16,20\right)$	18	10	180
$\left[20,24\right)$	22	ν_4	$22\nu_4$
Σύνολο	---	$\nu_4 + 45$	$22\nu_4 + 590$

$x_1 = x_2 - c = 14 - 4 = 10$
$x_2 = 14$
$x_3 = x_2 + c = 14 + 4 = 18$
$x_4 = x_3 + c = 18 + 4 = 22$

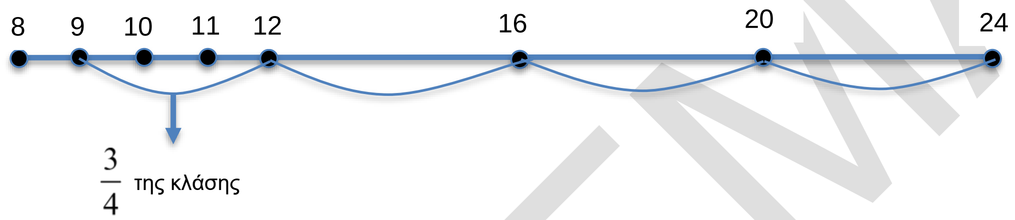
$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{22\nu_4 + 590}{\nu_4 + 45} = 14 \Leftrightarrow 22\nu_4 + 590 = 14\nu_4 + 630 \Leftrightarrow 8\nu_4 = 40 \Leftrightarrow \nu_4 = 5$$

Οπότε ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

Χρόνος σε λεπτά	x_i	ν_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\nu_i$
$[8,12)$	10	20	16	320
$[12,16)$	14	15	0	0
$[16,20)$	18	10	16	160
$[20,24)$	22	5	64	320
Σύνολο	---	50	---	800

Δ3.

Οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.



Άρα το πλήθος των υπολογιστών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα είναι:

$$\frac{3}{4}\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\frac{3}{4}20+15+10+5=15+15+10+5=45$$

Δ4.

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i=\frac{800}{50}=16$$

$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}=4$ λεπτά.

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}>\frac{1}{10}$$

Άρα $CV>10\%$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5.

Οι νέοι χρόνοι ορίζονται από τη μεταβλητή:

$$y_i=\frac{80}{100}x_i \Leftrightarrow y_i=0,8x_i$$

Άρα $\bar{y}=0,8\bar{x}$ και $s_y=0,8s$ (εφαρμογή)

$CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{0,8s}{0,8|\bar{x}|}=\frac{s}{|\bar{x}|}=CV$, άρα ανομοιογενές.